Date: / / Subject:

ملاحظة:

يقال عن فضاء طبولوجي انه قابل للفصل اذا كان يحوي مجموعة كثيفة قابلة للعد

مثال:

الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ هو فضاء قابل للفصل لانه يملك مجموعة كثيفة قابلة للعد هو $\mathbb{Q}$

م ٦

مثال: اذا كان لدينا فضاء طبولوجي (X, τ) منفصل

بين المجموعات الكثيفة لهذا الفضاء؟

يحوي ~~المجموعات الكثيفة~~ هذا الفضاء مجموعة كثيفة وحيدة هي X فقط $\bar{X} = X$

بفرض لدينا $A \neq X$ و $A \neq \emptyset$ عندها تكون مجموعة مغلقة و $\bar{A} = A$ فهي ليست كثيفة

لأن لصاقتها تساويها ولا تساوي X

مثال:

الفضاء (X, τ) غير منفصل τ طبولوجيا ضعيفة

بفرض $A \neq \emptyset$ ومنه $\bar{A} = X$ فهيا كثيفة وبالتالي في هذا الفضاء جميع المجموعات

كثيفة ماعدا الـ $\emptyset$ لأن $\tau = \{X, \emptyset\}$

- الصاقة الصفر مجموعة تحوي نفسها.

فضاء ~~المتمات~~ المتممات المنتهية:

لتكن X مجموعة غير منتهية اذا كان A مجموعة جزئية من X فنقصد بالرمز $|X \setminus A| < \infty$

المتممة المنتهية اي متممة A مجموعة منتهية لنعرف طبولوجيا على الشكل التالي τ

أسرة المجموعات الجزئية من X التي متمماتها منتهية

$\tau = \{U \subseteq X : |X \setminus U| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$ متمماتها ليست منتهية

تدعى طبولوجيا المتممات المنتهية والفضاء الناتج فضاء المتممات المنتهية

لنتأكد ان τ طبولوجيا؟؟

① شرط الاجتماع لنفرض $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ أسرة من عناصر τ

لنثبت ان الاجتماع من τ $\bigcup_\alpha U_\alpha$ لنأخذ $X / \bigcup_\alpha U_\alpha$

$X / \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcap_\alpha \underbrace{(X \setminus U_\alpha)}_{\text{مجموعة منتهية}}$ حسب دلجورغان

$\bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$ $\subset \tau$

② بالنسبة للتقاطع $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau$ لنثبت أن $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$

لنأخذ المتممة $X / \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ حسب دلجورغان $X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(X \setminus U_i)}_{\text{منتهية}}$

Date : / / Subject:

③ $X/X = \emptyset$ و $X \setminus \emptyset = X$ ومنه $\emptyset, X \in \tau$ ومنه τ طبولوجيا

المجموعان المفتوحة في هذا الفضاء هي أي مجموعة متممتها منتهية بالإضافة الى $\emptyset$

بالإضافة الى ان المجموعان المغلقة هي المجموعان المنتهية بالإضافة لـ X

مثال

لنفرض $X = \mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية

① مجموعة مفتوحة: $U_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ مفتوحة

لأن متممتها منتهية $X \setminus U_1 = \{1, 2\}$

وايضاً $U_2 = \{1, 2, 3, 17, 18, 19, 20 \dots\}$

متممتها منتهية $X \setminus U_2 = \{4, 5 \dots 16\}$

② مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة:

الأعداد الفردية $A = \{1, 3, 5, 7 \dots\}$ غير منتهية متممتها غير منتهية

أو الأعداد الزوجية أو مضاعفات عدد

* في هذا الفضاء تتحقق الخاصة التالية:

اي مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين تتقاطعان

مثال: $U, V \in \tau$ مجموعتين مفتوحتين وغير خاليتين

البرهان: نفرض ان $U \cap V = \emptyset$ هذا يعني متممة اي منهما تحوي الأخرى على سبيل المثال

$X \setminus U \supseteq V$ وهذا غير ممكن لأن $U \in \tau \Leftarrow X \setminus U$ منتهية في حين

أن $V \in \tau$ هي غير منتهية وهذا خاطئ ومنه $U \cap V \neq \emptyset$

وبالتالي أي جوارين لأي نقطتين يتقاطعان في هذا الفضاء $X = \mathbb{N}$

مثال:

لتكن A مجموعة جزئية من فضاء المتممات المنتهية X أوجد:

A° , $\bar{A}$, A' , $Fr(A)$, $Ext(A)$

نميز حالتين:

① A مجموعة منتهية

لأنها لا تحوي مجموعة مفتوحة (غير منتهية) $A^\circ = \emptyset$

$\bar{A} = A$ منتهية $\Leftarrow$ مغلقة

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = A$

$Ext = X / A^\circ = X \setminus A$

Date : / / Subject:

لنأخذ $A = \{1,2,3\}$ ← لأن $\acute{A} = \emptyset$

لو أخذنا $U = \{1,2,3,4,5,6,\dots\}$ مفتوحة متممتها مغلقة تحوي الواحد فيها جوار له

$U \cap A \setminus \{1\} = \emptyset$ ومنه الواحد ليس نقطة تراكم ويطبق على اي عنصر هذا

حالة ② A مجموعة غير منتهية

هناك احتمالان بالنسبة لـ A° $A^\circ =$

الأول ان متممة A منتهية X/A عندها A مفتوحة حسب تعريف وبالتالي $A^\circ = A$

والثاني ان متممة A غير منتهية X/A عندها $A^\circ = \emptyset$

فإن هذا الفضاء اي مجموعة غير منتهية $\bar{A} = X$ ←

تكون كثيفة لأن لنفرض U جوار كيفي لـ X ومنه

$U \cap A \neq \emptyset$ ومنه X لا صفة لأنه لو كان $U \cap A = \emptyset$ ⇐

$A \subset X/U$ وهذا مستحيل لأن $X \setminus U$ منتهية و A غير منتهية

$Fr = \bar{A} \setminus A^\circ =$

$Ext = X / \bar{A} =$

$\acute{A} = X$

مرتبة ١٧

برهن $Ext\ (A \cup B) = Ext\ A \cap Ext\ B$ الخارجية = متممة الصاقة

$X \setminus \overline{A \cup B} = X \setminus (\bar{A} \cup \bar{B})$

$X \setminus \overline{A \cup B} = (X \setminus \bar{A}) \cap (X \setminus \bar{B})$ حسب دي مورغان

التطبيقات المستمرة:

تعريف: ليكن f معرف $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ و $x_0 \in X$ نقطة من المنطلق نقول عن التطبيق f انه مستمر في النقطة x_0 اذا كان من أجل أي جوار V لـ نقطة $f(x_0)$ من Y يوجد جوار U لنقطة x_0 في X بحيث $f(U) \subset V$

مبرهنة:

يكون التطبيق $f : X \to Y$ من الفضاء الطبولوجي X إلى الفضاء الطبولوجي Y مستمر في نقطة x_0 من X اذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية لأي جوار لنقطة $f(x_0)$ في Y في جوار لنقطة x_0 في X شرط اللازم والكافي ليكن f تطبيق مستمر

البرهان:

Date : / / Subject:

لنفرض f مستمرة في x_0 عندئذٍ حسب التعريف من أجل أي جوار V لـ $f(x_0)$ يوجد
جوار U لنقطة x_0 بحيث $f(U) \subset V$

ومن هنا نجد أن $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$

U فرضاً جوار x_0 وما يحوي الجوار جوار لـ x_0 ومنه $f^{-1}(V)$ جوار لـ x_0

وبالعكس لنفرض الشرط محقق عندها من أجل أي جوار V لـ $f(x)$ يوجد
جوار U لـ x_0 بحيث $U = f^{-1}(V)$ بحيث

$f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ ومنه التطبيق مستمر في نقطة x_0

- حتى يكون $f^{-1}(V)$ مستمر يجب أن يكون تقابل (متباين - غامر)

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

مثال إذا كان لدينا $y = \sin x$

$f^{-1}(0) = k\pi$ و $k = 0, 1, 2 \ldots$

$y = f(x) = x^2$

$f^{-1}(1) = \mp 1$, $f^{-1}(4) = \mp 2$